

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Campus Blumenau

## Física Geral III

Aula Teórica 05 (Cap. 25 parte 1/2) :  
A Lei de Gauss

Prof. Marcio R. Loos

---

---

---

---

---

---

---

---

### Johann Carl Friedrich Gauss

“ 1777 - 1855.  
 “ Seu pai era jardineiro e pedreiro.  
 “ Sua mãe era analfabeta.  
 “ Aos sete anos entrou para a escola.  
 “ Na escola, seu diretor pediu que os alunos somassem os números inteiros de 1 a 100...  
 “ ...o diretor mal havia enunciado o problema e Gauss já havia obtido o resultado 5050...  
 “ Por ter acabado tão rápido Gauss foi colocado de castigo!  
 “ Gauss estava usando o raciocínio que demonstra a fórmula da soma de uma **progressão aritmética**.



$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof@ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

### O que é a Lei de Gauss?

“ Apesar de muito útil, a Lei de Coulomb é expressa em uma forma que não permite simplificações em situações de simetria.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

“ A Lei de Gauss não nos diz nada de novo!  
 “ Ela não é uma nova lei da Física!  
 “ É outra forma de expressar a Lei de Coulomb.  
 “ A Lei de Gauss é muitas vezes mais fácil de ser usada do que a Lei de Coulomb (simetria).  
 “ A escolha de qual Lei usar dependerá do problema!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof@ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss

“ Como determinar a carga  $q$  dentro da caixa?

(a) (b)

Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Podemos usar uma carga teste  $q_0$  para medir  $E$  fora da caixa!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss

“ A Lei de Gauss é aplicada usando-se uma **superfície gaussiana**.

“ A superfície gaussiana é uma superfície **fechada hipotética** que envolve toda a distribuição de carga.

“ A lei de Gauss **relaciona** as **linhas de campo elétrico** que passam através da superfície fechada e a **carga líquida envolvida** pela superfície.

“ Na fig. ao lado, a superfície gaussiana é uma esfera.

“ Constatamos um campo em cada ponto da esfera.

“ O campo tem mesmo módulo em cada ponto e aponta radialmente para fora!

“ Isto sugere que uma carga **positiva** está dentro da esfera.

“ **Sem medir a carga dentro da esfera ou saber sua distribuição, podemos usar a Lei de Gauss para calcular a carga líquida dentro da superfície!**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fluxo de Volume

(a) (b)

**(a)** A taxa de **fluxo de fluido** através do retângulo de área  $A$  é  $\mathbf{vA}$  quando a área do retângulo está perpendicular ao vetor velocidade.

**(b)** Quando o retângulo forma um ângulo  $\phi$  com a vertical, a taxa de fluxo é  $\mathbf{vA} \cos \phi$ .

Podemos substituir o **vetor velocidade** do fluido pelo **campo elétrico  $E$**  para obter o conceito de fluxo do campo elétrico  $\Phi$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fluxo do campo elétrico

(a)

(b)

(a) O fluxo elétrico através da superfície vale  $\Phi = EA$ .

(b) Quando o vetor área forma um **ângulo**  $\phi$  com o vetor  $E$ , a área projetada num plano orientado perpendicular ao fluxo é:

$A_{\text{perp.}} = A \cos \phi$

Logo:

$\Phi = EA \cos \phi = E \cdot A$

O fluxo é zero quando  $\phi=90^\circ$ , o retângulo estará em um plano paralelo ao fluxo e nenhuma linha de campo passa pelo retângulo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

“ Vimos que podemos imaginar linhas de campo fluindo através de uma superfície.

“ Considere uma **superfície Gaussiana assimétrica** imersa em um campo não-uniforme.

“ Dividimos a superfície em pequenos quadrados  $\Delta A$ .

“ Cada  $\Delta A$  é representado por um **vetor área**  $\Delta A$ .

“  $\Delta A$  é **perpendicular** a superfície e aponta para fora.

“ Como  $\Delta A$  é pequeno,  $E$  é constante.

“  $\Delta A$  e  $E$  formam um ângulo  $\theta$  entre si (fig.).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

“ Representamos o fluxo de linhas de campo como  $\Phi$ .

“ O fluxo de campo elétrico através de um elemento de área  $\Delta A$  é:

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \vec{\Delta A} = E \Delta A \cos \theta$$

“  $\theta > 90^\circ$ : O fluxo é **negativo** ( $E$  aponta para dentro da superfície)

“  $\theta < 90^\circ$ : O fluxo é **positivo** ( $E$  aponta para fora da superfície)

“  $\theta = 90^\circ$ : O fluxo é **nulo** ( $E$  é perpendicular à superfície)

“ A unidade de fluxo elétrico é  $N \cdot m^2 / C$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

" Quando temos uma superfície complexa, podemos dividi-la em minúsculos elementos infinitesimais de área:

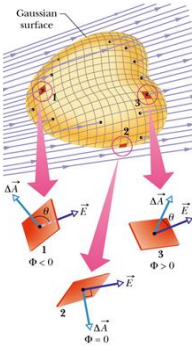
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos \theta$$

" Estaremos interessados em **superfícies fechadas** (aí a direção "para fora" é evidente).  
 " **Qual é o fluxo elétrico fora de tal superfície fechada?**  
 " Devemos integrar sobre toda a superfície (fechada).

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Fluxo positivo => fora  
 Fluxo negativo => dentro

" O símbolo  $\oint$  indica a integral sobre uma superfície fechada.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

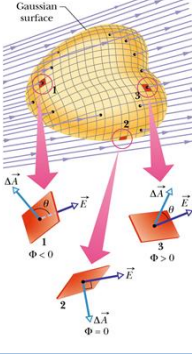
---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

" A superfície fechada é chamada de **Superfície Gaussiana**  
 ...uma vez que esta superfície é usada pela Lei de Gauss

**Lei de Gauss**

O fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga encerrada pela superfície.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 11

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss: forma matemática

" A constante de proporcionalidade na Lei de Gauss é  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$q_{enc}$  (ou  $q$ ) é a soma algébrica de todas as cargas encerradas pela superfície.  
**Use o sinal na soma!**  
 $q > 0$  fluxo p/ fora.  
 $q < 0$  fluxo p/ dentro.

" Cargas fora da superfície não são incluídas no cálculo!  
 " A distribuição das cargas no interior da superfície não importa.  
 " O vetor resultante  $\mathbf{E}$  na Lei de Gauss é o campo elétrico resultante de todas as cargas internas ou externas à superfície gaussiana!  
 " As linhas de campo devido a cargas externas entram e saem da superfície em igual quantidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 12

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Pense um pouco...**

Qual das figuras a seguir corretamente mostra um fluxo elétrico para fora do elemento de área?

A. I.

B. II.

C. III.

D. IV.

E. I and III.

Resposta: Lembre-se  $\theta < 90^\circ$ : O fluxo é positivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Lei de Gauss – Superfície gaussiana encerrando cargas positiva e negativa**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Lei de Gauss: forma matemática**

" Você lembra?

" Ao aprendermos sobre a Lei de Coulomb, escrevemos a constante k como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

" Podemos ver agora o motivo ao integrarmos o fluxo elétrico de uma carga puntiforme sobre uma superfície gaussiana esférica:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \quad \epsilon_0 E \cos \theta \oint dA = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 EA = q_{enc} \quad \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{enc}$$

Resolvendo a Eq. para E temos:

**Lei de Coulomb**  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{enc}}{r^2}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

“ A Figura mostra uma superfície gaussiana na forma de um cilindro de raio R imerso num campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ , com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo  $\Phi$  do campo elétrico através dessa superfície fechada?

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

“ A figura mostra um arranjo de 3 cargas. Diferentes superfícies gaussianas são mostradas em (a) e (b). Através de qual superfície, se qualquer, passa o maior fluxo elétrico?

$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$   
 $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Aplicação

“ Considere um dipolo com cargas positiva e negativa de igual módulo.

“ Imagine quatro superfícies  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , como mostrado na fig.

- $S_1$  encerra uma carga positiva. Note que o campo aponta para fora de  $S_1$ , sendo o fluxo de  $E$  **positivo**.
- $S_2$  encerra uma carga negativa. Note que  $E$  aponta para dentro em todos pontos da superfície. Assim, o fluxo de  $E$  através de  $S_2$  é **negativo**.
- $S_3$  não encerra carga. O fluxo de  $E$  é positivo na parte superior e negativo na parte inferior. Os fluxos se anulam e **não há fluxo líquido** através de  $S_3$ .
- $S_4$  encerra ambas cargas. De novo, não há carga líquida encerrada: o fluxo entrando e saindo é igual. **Não há fluxo líquido** através de  $S_4$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

“ A figura mostra três pedaços de plástico carregados e uma moeda eletricamente neutra. As seções transversais de duas superfícies gaussianas estão indicadas. Qual é o fluxo do campo elétrico através de cada uma dessas superfícies? Suponha  $q_1=+3.1$  nC,  $q_2=-5.9$  nC e  $q_3=-3.1$  nC.

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$     $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

Resposta:  
 $\Phi_2 = +350 \text{ Nm}^2/\text{C} = +3,5 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$   
 $\Phi_1 = -670 \text{ Nm}^2/\text{C} = -6,7 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor

Imagine um **campo elétrico** em **algum ângulo** arbitrário na superfície do condutor.

Há uma **componente perpendicular à superfície**, e cargas se moverão nesta direção até alcançar a superfície.

Como não podem deixar a superfície, as **cargas param**.

Há também uma **componente paralela à superfície**. As cargas também sofrerão uma força nesta direção.

Uma vez que as cargas estão **livres** para se mover (condutor e não isolante) elas irão anular qualquer componente paralela de E.

**Em um tempo muito curto, apenas as componentes perpendiculares existirão.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor carregado

Podemos usar a Lei de Gauss para mostrar que **o interior de um condutor deve ter uma carga líquida nula**.

A fig. mostra um condutor de forma arbitrária **CARREGADO**.

Desenhamos uma **superfície gaussiana** dentro do condutor imediatamente junto à superfície.

Fisicamente, esperamos que **não haja campo elétrico dentro do condutor**. Se houvesse as cargas, elas se moveriam (correntes internas).

Como  $E=0$  no interior, E deve ser zero na superfície gaussiana! Portanto, o fluxo de campo através da superfície é zero e a carga encerrada é nula.

**Se as cargas não estão dentro da sup. gaussiana, só podem estar na superfície.**

Imagine que façamos um buraco no condutor e desenhamos uma sup. gaussiana ao redor.

Pelo mesmo argumento anterior, não há campo elétrico através da nova sup., e não há carga líquida no buraco.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA   Prof. Loos   Física Geral III   loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

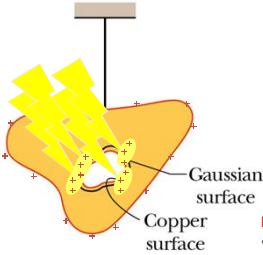
---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor



" É notável que se tentarmos depositar cargas no interior do condutor...  
 " ...todas as cargas se movem para o exterior e se distribuem de modo que o campo elétrico em todos os pontos é normal à superfície.  
 " Este fato não é óbvio! Mas a Lei de Gauss nos permitiu mostrar isso.

**Lembre-se:**

- O campo elétrico é nulo dentro de condutores!
- A partir da Lei de Gauss, buracos/cavidades em condutores tem  $E = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 22

---

---

---

---

---

---

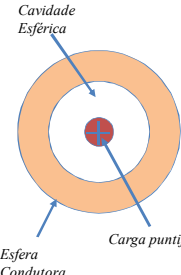
---

---

---

---

### Uma carga dentro de um condutor



" A fig. mostra uma seção transversal de uma casca esférica **metálica** de raio R.  
 " Uma carga puntiforme +q está localizada no centro da casca.  
 " A casca está eletricamente neutra.  
 " Quais são as cargas induzidas nas superfícies interna e externa da casca?  
 " Estas cargas estão uniformemente distribuídas?  
 " Qual é a configuração do campo **E** dentro e fora da casca?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 23

---

---

---

---

---

---

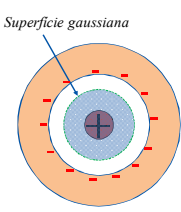
---

---

---

---

### Uma carga dentro de um condutor



**Será o campo nulo ( $E=0$ ) dentro da cavidade?**  
**Não**, pois há uma carga encerrada pela cavidade (Lei de Gauss)

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

**Será o campo nulo ( $E=0$ ) no condutor?**  
**Sim**, pois como vimos, se houvesse um campo E no condutor as cargas iriam se mover.

**Se alargarmos a superfície gaussiana de modo que ela esteja ainda dentro do condutor, haverá alguma carga líquida encerrada pelo condutor?**  
 Parece que sim, mas **não** pode haver. De acordo com a Lei de Gauss, se  $E=0$  e  $q_{enc}=0!$

**Como explicar isso?**  
 Deve haver uma carga igual e oposta induzida na superfície interior.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 24

---

---

---

---

---

---

---

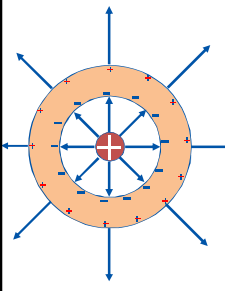
---

---

---



**Uma carga dentro de um condutor**



A carga negativa interage com a carga puntiforme de modo que o campo seja radial dentro da cavidade.

A carga negativa não pode surgir do nada.  
**De onde ela vem?**

Ela vem da superfície externa: elétrons são atraídos pela carga puntiforme no centro. Assim os elétrons deixaram uma carga positiva para trás.

A carga líquida positiva que surge na superfície externa do condutor é exatamente a mesma que a carga puntiforme no centro.

**Qual a forma das linhas de campo fora da casca?**

Pela simetria esférica, a **casca positiva de cargas atua como uma carga puntiforme no centro**. Assim, as linhas de campo são como as da carga puntiforme no centro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

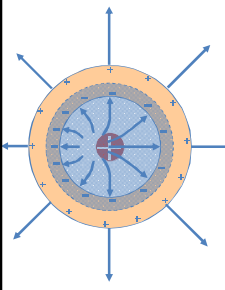
---

---

---

---

**Uma carga dentro de um condutor**



**O que acontece se movermos a carga do centro?**

Ela induzirá uma distribuição de cargas não uniforme na parede interna.

Note que as linhas de campo são distorcidas de modo que permanecem perpendiculares à parede interna.

**O que acontece com a distribuição de carga positiva externa?**

Desenhe uma superfície gaussiana dentro do condutor para descobrir!

A carga líquida encerrada pela superfície é zero, então  $E=0$ , o que já sabíamos, pois a superfície está dentro do condutor.

**A carga puntiforme interna é blindada pela distribuição de carga induzida**, assim as cargas externas estarão uniformemente distribuídas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Você já pode resolver os seguintes exercícios:**

**Capítulo 23:** 5, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 18, 19 e 21.  
**Capítulo 24:** 1, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25  
**Capítulo 24:** 29, 32, 33, 34, 35  
**Capítulo 24:** 36, 47, 51, 52 e 56  
**Capítulo 25:** 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.  
 Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):  
 web: [loos.prof.ufsc.br](http://loos.prof.ufsc.br) e-mail: [marcio.loos@ufsc.br](mailto:marcio.loos@ufsc.br)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---