

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Campus Blumenau

## Física Geral III

**Aula Teórica 03 (Cap. 24 parte 2/3) :  
Cálculo do campo elétrico produzido por uma  
distribuição contínua de cargas.**

Prof. Marcio R. Loos

---

---

---

---

---

---

---

---

### O campo elétrico criado por uma distribuição contínua de cargas

Até o momento, tratamos de distribuições **discretas de cargas** (cargas puntiformes).

Consideraremos agora **distribuições contínuas** de carga.  
Ex.: linha, superfície e volume de carga.

O campo elétrico será obtido por integração.

Expressaremos a carga de um objeto através de sua **densidade de carga** e não a carga total. (Lembre-se da densidade... de massa!)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

### O campo elétrico criado por uma distribuição contínua de cargas – cont.

Distribuição contínua de cargas

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2}$$

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$E = \int dE$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

### Densidades de carga


“ Como representamos a carga  $Q$  em um objeto?

Carga total  
 $Q$

→


Pequenos pedaços de carga  
 $dq$

Linha de carga  
 $\lambda$  = densidade linear de carga




$dq = \lambda dx$

Superfície de carga:  
 $\sigma$  = densidade superficial de carga



$dq = \sigma dA$

Volume de carga  
 $\rho$  = densidade volumétrica de carga



$dq = \rho dV$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### O campo elétrico criado por uma distribuição contínua de cargas

“ A única forma de entender todos os conceitos apresentados até agora será através da resolução de exercícios.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

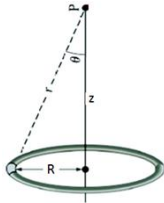
---

### Exemplo 1: O campo elétrico criado por um anel de carga

“ A figura mostra um anel delgado de raio  $R$  com uma densidade linear de carga positiva  $\lambda$  ao longo de sua circunferência.

“ O anel é isolante e as cargas não se movem.

“ Qual o campo elétrico num ponto  $P$  a uma distância  $z$  do plano do anel ao longo de seu eixo central?



Imagine um anel formado por vários ímãs esféricos...  
Ver animação no site.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Dicas para resolução de exercícios**

1. Desenhe um sistema de coordenadas no diagrama.
2. Desenhe um elemento infinitesimal e o campo devido ao elemento. Repita o procedimento para um elemento simétrico.
3. Escreva dq em termos do elemento infinitesimal.
4. Escolha uma variável de integração (ex.:  $\theta$ ).
5. Escreva as variáveis em termos da variável de integração.
6. Escreva a integral e coloque limites.
7. Resolva a integral.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 1: campo elétrico criado por um anel de carga**

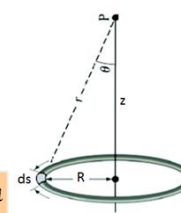
" Sabemos que  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$  mas não estamos tratando de uma carga puntiforme...  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$

" O anel é formado por "bilhões" de elementos diferenciais de carga (muito pequenos) que podem ser tratados como cargas puntiformes.

" A Eq. acima pode então ser usada para somar o campo elétrico criado por cada elemento diferencial no ponto P.

" Para o anel, o elemento diferencial é ds.

" O anel possui uma densidade linear de cargas  $\lambda = \frac{q}{s} \Rightarrow q = \lambda s$   $\frac{dq}{ds} = \lambda$

" A carga de um elemento diferencial vale: 

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---


**Exemplo 1: campo elétrico criado por um anel de carga**

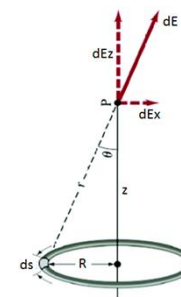
" dq cria um campo dE em P (fig.)

" O módulo de dE vale:  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$

" Como  $dq = \lambda ds$

" Temos:  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}$

" Da fig., obtemos:  $r^2 = z^2 + R^2$  

" Assim:  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}$  

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

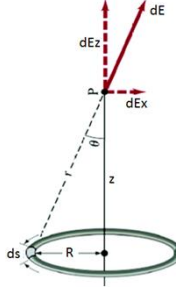
---

---

**Exemplo 1: campo elétrico criado por um anel de carga**


"  $dE$  forma um ângulo  $\theta$  com  $z$  e possui componentes paralelas e perpendiculares a  $z$  (Fig).  
 " Os componentes perpendiculares a  $z$  se cancelam.  
 " Assim o campo elétrico em  $P$  resulta dos componentes paralelos de  $dE$

$$\cos \theta = \frac{dE_z}{dE} \Rightarrow dE_z = dE \cos \theta$$



" mas,

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

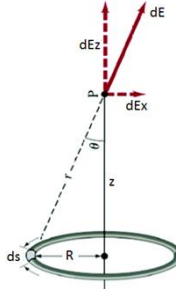
---

**Exemplo 1: campo elétrico criado por um anel de carga**

" Assim


$$dE \cos \theta = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)} \right] \left[ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

$$dE \cos \theta = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



" Devemos somar todos os componentes  $dE \cos \theta$  produzidos por todos elementos  $ds$ .  
 " Integramos a Eq. por toda a circunferência do anel:  
 "  $s=0$  até  $s=2\pi R$

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 11

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 1: campo elétrico criado por um anel de carga**

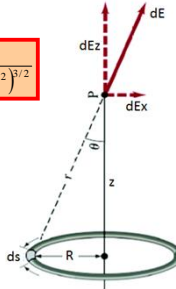
$$E = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds$$

$$E = \frac{\lambda z 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

" Lembre-se de que

$$\lambda = \frac{q}{s} \Rightarrow q = \lambda s \Rightarrow q = \lambda(2\pi R)$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$



**Casos limites:**

1)  $z \gg R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2}$$

Carga puntiforme

2)  $z=0$  (centro do anel)

$$E = 0$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 12

---

---

---

---

---

---

---

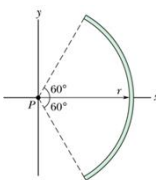
---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

“ A Fig. mostra uma haste de plástico que tem uma carga  $-Q$  uniformemente distribuída.  
 “ A haste tem raio  $r$  e subtende um ângulo de  $120^\circ$ .  
 “ Os eixos coordenados foram colocados de modo que o eixo de simetria da haste coincida com o eixo  $x$ , e a origem está no centro de curvatura  $P$  da haste. Qual é o campo elétrico  $\underline{E}$  criado pela haste no ponto  $P$  em termos de  $Q$  e  $r$ ?



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 13

---

---

---

---

---

---

---

---

---

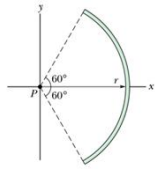
---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

**Passo 1:** Desenhar um sistema de coordenadas. Tire vantagem de situações simétricas!



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 14

---

---

---

---

---

---

---

---

---

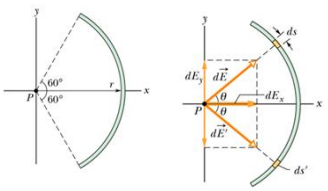
---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

**Passo 2:** Desenhar um elemento infinitesimal e o campo devido ao elemento. Repita o procedimento para um elemento simétrico.



$$\cos \theta = \frac{dE_x}{dE}$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 14

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

**Passo 3:** Escreva dq em termos do elemento infinitesimal.

$$\lambda = \frac{q}{s} \Rightarrow q = \lambda s \quad \frac{dq}{ds} = \lambda$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}$$

Estamos interessados na componente  $dE_x$  de  $dE$ :

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds$$

**Passo 4:** Escolha uma variável de integração.  
 r? não, pois é cte  
 $\theta$ ? Sim...mas como incluir  $\theta$  na eq. para  $dE$ ?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

**Passo 5:** Escreva as variáveis em termos da variável de integração

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds$$

Se vamos integrar em função de  $\theta$ , precisamos de um  $d\theta$  na eq. acima!  
 Note que a eq. acima tem duas variáveis de integração ( $\theta, s$ ). Para podermos integrar, devemos eliminar uma variável!

$$s = r\theta \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = r \Rightarrow ds = r d\theta$$

Circunferência do círculo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

Substituindo  $ds = r d\theta$  em  $dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds$

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta r d\theta \quad dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \cos \theta d\theta$$

**Passo 6:** Escreva a integral e coloque limites.

$$E = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \int \cos \theta d\theta \quad E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta$$

**Passo 7:** Resolva a integral

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\text{sen} \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\text{sen}(60^\circ) - \text{sen}(-60^\circ)]$$

$$E = \frac{1,73\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo 2: campo elétrico criado por uma haste (arco)**

“ O problema pede o campo elétrico criado pela haste no ponto P em termos de Q e r.

$\lambda = \frac{q}{s}$

$q = \frac{Q}{3}$

$\lambda = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{0,48Q}{r}$

$E = \frac{1,73(0,48)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$E = \frac{0,83Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 19

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exercício**

“ A Fig. mostra um arco de círculo de plástico com uma carga  $-Q$  uniformemente distribuída. Qual é o campo elétrico E criado pela haste no ponto P?

Resposta:

$$E = \frac{\sqrt{2}Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

Formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 20

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Você já pode resolver os seguintes exercícios:**

**Capítulo 23:** 5, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 18, 19 e 21.

**Capítulo 24:** 1, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25

**Capítulo 24:** 29, 32, 33, 34, 35

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.  
 Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):  
 web: [loos.prof.ufsc.br](http://loos.prof.ufsc.br) e-mail: [marcio.loos@ufsc.br](mailto:marcio.loos@ufsc.br)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 21

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---